ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

1. $xydx+(x+1)dy=0$

2. $y^2(x^3+1)dx+(x^3-5x^2+6x)dy=0$

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών και να προσδιοριστεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο ορίζεται η λύση:

3. $y'=\dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$, $y(0)=-1$

4. $e^x dx - ydy = 0$, $y(0)=1$

ΛΥΣΗ

1. Αν $y(x+1)\neq 0$, η δοθείσα εξίσωση είναι χωριζόμενων μεταβλητών αφού μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{xdx}{x+1}+\frac{dy}{y}=0, \quad (1)$$

και άρα

$$\int\frac{xdx}{x+1}+\int\frac{dy}{y}=C,$$

ή

$$x-\ln|x+1|+\ln|y|=C,$$

ή

$$y=C_1(x+1)e^{-x} \text{ όπου } C_1=\ln|C|. \quad (2)$$

Από την άλλη μεριά, η εξίσωση έχει επίσης ως λύσεις τις $y\equiv 0$ και $x\equiv -1$. Η πρώτη προκύπτει άμεσα από τη *γενική λύση* (2) αν θέσουμε $C_1=0$ και άρα είναι απλώς μια ειδική λύση. Η δεύτερη όμως είναι μια*ιδιάζουσα λύση* αφού δεν μπορεί να προκύψει από τη (2) για κάποια πραγματική τιμή της σταθεράς C_1. Έτσι, οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι

Διαφορικές Χωριζόμενων Μεταβλητών

$$y = C(x+1)e^{-x}, \ C \in R,$$

και

$$x \equiv -1.$$

2. Αν $y(x^3 - 5x^2 + 6x) \neq 0$, η εξίσωση είναι χωριζόμενων μεταβλητών αφού γράφεται στη μορφή

$$-\frac{1}{y^2}dy = \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx. \quad (1)$$

Αναλύοντας σε μερικά κλάσματα το δεξιό μέλος της (1) έχουμε

$$-\frac{1}{y^2}dy = \left(1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)}\right)dx,$$

και με ολοκλήρωση παίρνουμε τη *γενική λύση*

$$\frac{1}{y} = x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C, \quad (2)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Από την άλλη μεριά, η εξίσωση έχει ως *ιδιάζουσες λύσεις* τις ακόλουθες

$$y \equiv 0, \quad (3)$$

$$x \equiv 0, \quad (4)$$

$$x \equiv 2, \quad (5)$$

και

$$x \equiv 3. \quad (6)$$

3. Η εξίσωση είναι χωριζόμενων μεταβλητών αφού γράφεται στη μορφή

$$2(y-1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx, \quad (1)$$

και άρα

Διαφορικές Χωριζόμενων Μεταβλητών

$$\int 2(y-1)dy = \int (3x^2+4x+2)dx,$$

ή

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C, \quad (2)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Για να προσδιορίσουμε τη λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη,
θέτουμε $x=0$ και $y=-1$ στην (2) και βρίσκουμε ότι $C=3$. Έτσι, η λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται σε *πεπλεγμένη μορφή* από τη σχέση

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3. \quad (3)$$

Για να βρούμε τη μορφή της συνάρτησης $y(x)$ θα πρέπει να επιλύσουμε την (3) ως προς x, κάτι που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι πολύ εύκολο αφού η (3) είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού ως προς y,και έχουμε

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \quad (4)$$

Όμως η (4) δίνει δύο διαφορετικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης εκ των οποίων μόνο αυτή με το αρνητικό πρόσημο ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0)=-1$. Συνεπώς, η μορφή της συνάρτησης $y(x)$ δίνεται από την

$$y = y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \quad (5)$$

Το μέγιστο διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής x στο οποίο ορίζεται η λύση του προβλήματος προσδιορίζεται από το αντίστοιχο διάστημα για το οποίο η ποσότητα μέσα στην τετραγωνική
ρίζα της (5)είναι <u>αυστηρά</u> (γιατί;) θετική. Έτσι, επειδή

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 \equiv (x+2)(x^2+2)$$

συμπεραίνουμε άμεσα ότι το μέγιστο πεδίο ορισμού της λύσης είναι το $(-2,\infty)$.

4. Ολοκληρώνοντας κατ΄ ευθείαν τη διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$\int e^x dx - \int y dy = C,$$

ή

Διαφορικές Εξισώσεις Μεταβλητών

$$y^2 = 2e^x - 2C \text{. (1)}$$

Για τον προσδιορισμό της σταθεράς C εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη, θέτοντας στην (1) $x = 0$ και $y = 1$, και βρίσκουμε ότι $C = \frac{1}{2}$. Έτσι, η λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από την

$$y^2 = 2e^x - 1\text{, (2)}$$

και λύνοντας την (2) ως προς y,

$$y = \pm\sqrt{2e^x - 1}\text{. (3)}$$

Από τις δύο λύσεις στην (3) η μοναδική που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη είναι αυτή με το θετικό πρόσημο. Συνεπώς, η μορφή της συνάρτησης $y(x)$ της λύσης είναι

$$y = y(x) = \sqrt{2e^x - 1}\text{. (4)}$$

Όπως και στην Άσκηση 3, το μέγιστο διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής x στο οποίο ορίζεται η λύση του προβλήματος προσδιορίζεται από το αντίστοιχο διάστημα για το οποίο η ποσότητα μέσα στην τετραγωνική ρίζα της (4) είναι αυστηρά (γιατί;) θετική, δηλαδή το $(-\ln 2, \infty)$.

Διαφορικές Χωριζόμενων Μεταβλητών